МЭ–2020–I– 19

Фамилия	**Струментов**
Имя	**Денис**
Отчество	**Андреевич**
Область	**Вологодская**
Город	**Вологда**
Школа	**МОУ «СОШ №13»**
Класс	8
Регистрационный номер	**13095**

Выход: 11 44 – 11 46

Задача №1

Подходит например число 111235

Проверим:

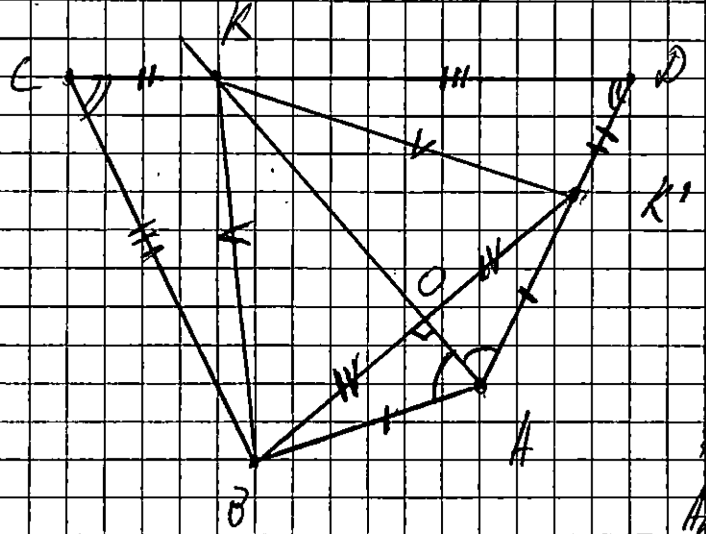
$1+1+1+\cancel{2}+2+3+5=13$

$2\cdot 3\cdot 5\cdot 1\cdot 1\cdot 1=30$

$$\begin{array}{r} \times\, 13 \\ 30 \\ \hline 390 \end{array}$$

Что и требовалось.

Задача 3



~~Дано~~

$KD = CB$ по усл.

$KC + AB = AD$

Отложим на отрезке AD точку K' так, чтобы ~~$AK' + K'D =$~~ $CK = DK'$.

$AK' + K'D = AK' + CK = AD =$

$= CK + AB \Rightarrow AB = AK'$

Соединим B и K'. $AK \cap BK' = O$. т.к. $\angle BAO = \angle AOK'$ по условию, ~~то~~ а $AK' = BA' \Rightarrow AO$ – высота, медиана, биссектриса в равнобедренном треугольнике $BAK' \Rightarrow OA$ – сер. пер. отрезка $BK' \Rightarrow OK$ – сер. пер. отр. BK' (т.к. $O \in AK$) $\Rightarrow BK = KK'$

Тогда:

$BK = KK'$ по доказ.
$BC = KD$ по усл.
$CK = DK'$ по постр.

$\Rightarrow \triangle CKB = \triangle KDK'$ по I пр. $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle C = \angle D$, что и требовалось док-ть.

Задача 2.

Заметим, что $x^2 = |x|^2$, т.е. чем больше модуль числа, тем больше его квадрат.

Расположим все числа в ряд по возрастанию, очевидно, что если между любыми соседними числами сумма не меньше 3, то между любыми несоседними она тоже не меньше 3.

Пусть найдутся два соседних числа отличающихся более чем на 3. Тогда рассмотрим большее по модулю, заменим его на меньшее по модулю ± 3 (в зависимости от знака). Т.е. если были числа a и $a+x$, ($x>3$ и $a>0$), то $a+x$ мы заменим на $a+3$, если же $a<0$ и $x<-3$, то $a+x$ мы заменим на $a-3$. Т.е. мы увеличиваем наименьшее число или уменьшаем наибольшее, пока не получим, что эти числа будут отличаться на 3 (при этом их модули уменьшаются т.к. изменяем мы наибольшее по модулю).

При этой операции кол-во чисел не меняется, но если изменяемое число входило в одну из сумм квадратов, то т.к. мы уменьшили модуль этого числа, то уменьшим его квадрат. И если квадрат этого числа входил в сумму квадратов, то она уменьшится.

Т.е. мы можем делать любое кол-во таких операций и при этом суммы квадратов крайних чисел увеличиваться не будут.

Значит, если у нас есть какой-нибудь пример, то мы можем свести его к примеру с таким же n, но при этом все соседние числа будут отличаться на 3.

Приведём его мы сведём за конечное число операций, т.к. с каждой операцией сумма модулей всех чисел уменьшается, но она конечное число.

Тогда пусть мы взяли пример для наибольшего n. Привели его. ~~[illegible]~~ Получилась последовательность из n чисел каждое из которых даёт одинаковый остаток при делении на 3 (т.к. любые два соседних отличаются на 3 $\Rightarrow$ у них один остаток, тогда у 1 и 2 чисел один остаток, у 2 и 3 и т.д.)

Тогда она содержит одно из чисел 0, 1 или 2 иначе все числа > 2 или < 0, но тогда можно добавить число ~~1/или~~ 0 или 2 ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ если все числа положительны, добавим 0 и заметим, что сумма квадратов двух положительных заменилась на сумму 0 и одного положительного, тогда она уменьшилась $\Rightarrow$ она < 500 ("0 и одного положительного", при чём положительное$^2 < 500$). Если все числа отрицательные, то заметим, что если добавить 0 нельзя, то есть число -2 или -1, то тогда ~~все~~ добавим число 2 и заметим, что $-2^2+2^2<500$ или $-1^2+2^2<500 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ можно добавить ещё одно число в обоих случаях $\Rightarrow$ n не наибольшее, но мы рассматриваем пример для наибольшего n.

Тогда ряд содержит одно из чисел 0, 1 или 2. Давайте будем выписывать все числа имеющие такой остаток при делении на 3, пока сумма квадратов крайних не станет больше 500.

I $-\cancel{18} \,|\, -15 \;\; -12 \;\; -9 \;\; -6 \;\; -3 \;\; 0 \;\; 3 \;\; 6 \;\; 9 \;\; 12 \;\; 15 \,|\, 18$ $\quad n = 11$

$|15|^2 + |18|^2 = 225 + 324 > 500$

$|15|^2 + |12|^2 = 225 + 144 < 500$

II $-20 \,|\, -17 \;\; -14 \;\; -11 \;\; -8 \;\; -5 \;\; -2 \;\; 1 \;\; 4 \;\; 7 \;\; 10 \;\; 13 \;\; 16 \,|\, 19$ $\quad n = 12$

$|13|^2 + |16|^2 = 169 + 256 < 500$

$|16|^2 + |19|^2 > |15|^2 + |18|^2 > 500$

$|11|^2 + |14|^2 < |12|^2 + |15|^2 < 500$

$|14|^2 + |17|^2 = 196 + 289 < 500$

$|17|^2 + |20|^2 > |16|^2 + |19|^2 > 500$

III $-19 \,|\, -16 \;\; -13 \;\; -10 \;\; -7 \;\; -4 \;\; -1 \;\; 2 \;\; 5 \;\; 8 \;\; 11 \;\; 14 \;\; 17 \,|\, 20$ $\quad n = 12$

аналогично случаю II

Итак, если $n > 12$, то мы упростим пример для $n \geq 12$ и он будет содержать один из рядов I – III $\Rightarrow$ если $n > 12$ то найдётся пара соседних, что сумма квадратов будет больше 500 (т.к. за "границей" будет хотя бы одно число) $\Rightarrow$ одна из сумм квадратов крайних чисел будет больше 500. $\Rightarrow n = 12$

~~[illegible]~~

Примечание: когда мы делаем операцию может так оказаться что числа разного знака, тогда ~~[illegible]~~ просто заменим X на число ± 3 ~~[illegible]~~ в зависимости от знака X. (если $X > 0$ то заменим на $+3$, а если $X < 0$ то заменим на $-X$)

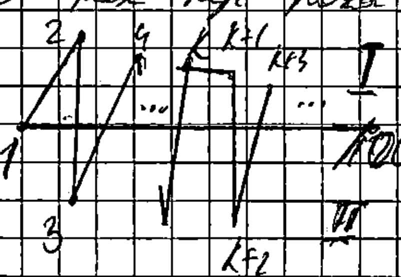
Если же модули ~~[illegible]~~ равны, то заменим $\pm X$ на ± 3 соответственно.

Задача 5.

Назовём ~~два~~ эти отрезки "первый" и "второй"
Заметим, что эти два отрезка не могут быть смежными
т.к. тогда ~~первый отрезок пересекает~~ каждый из
оставшихся 998 отрезков (кроме первого и смежных с ним)
пересекает первый (по условию) => первый отрезок пере-
секает 998 отрезков и пример невозможен. Т.е. если пример
есть, то первый отрезок не имеет со вторым общих
точек. Теперь проведём прямые через эти два отрезка и
заметим, что один из отрезков лежит в полуплоскости
на которые плоскость разбивает ~~прямую~~ прямая проведённая
через другой отрезок. Пусть для определённости второй
отрезок лежит в ~~полуплоскости~~ одной из полуплоскостей
на которые плоскость разбивается прямой проходящей через первый
отрезок. Теперь рассмотрим первый отрезок. ~~Из~~ Из него
выходят два звена, причём они пересекаются (т.к.
все звенья пересекаются между друг другом кроме первого
и второго) => эти звенья лежат в одной полуплоскости
(если они лежат в разных полуплоскостях, то есть точка,
точка их пересечения которая лежит в обеих ~~полу~~
полуплоскостях сразу, но это невозможно, т.к. тогда они
лежат на прямой между ними => все концы отрезков
лежат на одной прямой, что невозможно по условию) => звенья
выходящие из первого отрезка обязаны лежать в одной
полуплоскости.

Тогда пусть полуплоскости на которые прямая проходящая через первый отрезок разделяет плоскость называются I и II. Будем занумеруем вершины ломаной по кругу, причём первой будет одна из вершин первого отрезка. А последней другая его вершина.

Тогда пусть для определённости вершина "2" лежит в I-й полуплоскости. тогда вершина "3" обязана лежать во II-й полуплоскости (т.к. отрезок 2-3 обязан пересекать отрезок 1-2) тогда вершина "4" обязана лежать в I-й полуплоскости (т.к. отрезок 3-4 обязан пересекать отрезок 1-2) и т.д. (пока что мы предположили что ни один из отрезков 2-3 или 3-4 не является вторым отрезком) И так каждая следующая вершина будет лежать в полуплоскости отличающейся от той, в которой лежала предыдущая вершина. Это будет продолжаться до тех пор пока не появится второй отрезок;



На этом рисунке неважно что остальные отрезки непересекаемы, т.к. мы рассматриваем только пересечения с первым отрезком.

Тогда пусть в точке "k" для определённости лежащей в I-й полуплоскости находится одна из точек второго отрезка, тогда вторая точка второго отрезка лежит в этой же полуплоскости (т.к. второй отрезок лежит в одной полуплоскости на которые плоскость разделяет прямая проходящая через первый отрезок)

Тогда "k+2" точка находится во II-й полуплоскости (т.к. мы предположили, что точка "k" лежит в II-й полуплоскости) => точка "k+3" в I-й полуплоскости и т.д.

Аналогично 2, 4, 6... все чётные точки до точки k, лежат в I-й полуплоскости, а все нечётные во II-й; затем чётность поменялась т.к. точки k и k+1 лежат в одной полуплоскости => вершины 2 и 1000 лежат в разных полуплоскостях, т.к. 1000 > k > 2 (т.к. иначе второй отрезок соединялся бы с первым) => переход в чётности произошёл где-то после 2 но до 1000 => 2 и 1000 в разных полуплоскостях => => отрезки 1-2 и 1000-1001 в разных полуплоскостях, но мы доказали, что они в одной. Противоречие.

Примечание: почему один отрезок лежит в полуплоскости второго. Если это не так, то прямые, проведённые через эти отрезки пересекают другой отрезок, и если они пересекают одновременно, то сами отрезки пересекаются.