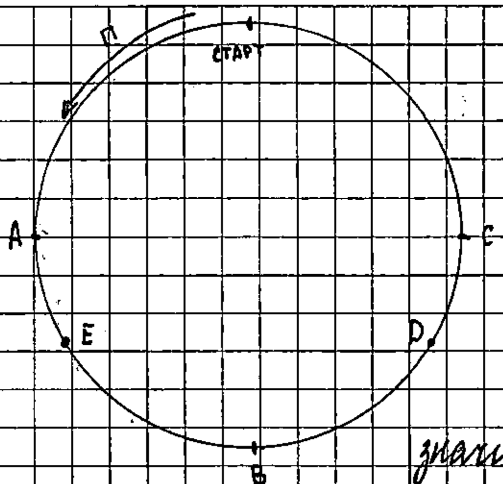
Фамилия	Каринская
Имя	Элина
Отчество	Алексеевна
Область	Вологодская
Город	ВМЛ
Школа	БОУ ВО «ВМЛ»
Класс	8
Регистрационный номер	15525

выход: 10^{42}

вход: 10^{43}

№6



Разделим круговую дорожку на 4 равные части. Скорость Пети = $v_П$

Скорость Васи = $v_В$

Из условия мы знаем, что $2v_П = v_В$

Они начинают бежать одновременно, значит, когда Петя пробежит в т. А (пробежит четверть круга), Вася окажется в точке В (пробежит $\frac{1}{2}$ круга). Т.к. Вася уже пробежал полкруга, он может поменять направление и бежать навстречу Пете. Скорость сближения = $3v_П$

Расстояние = $\frac{1}{4}$ круга => они встретятся на расстоянии $\frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ круга от, считая от старта (Время, которое бежит Петя на участке АВ = времени, которое бежал Вася, но т.к. $v_В = 2v_П$, Вася пробежит расстояние в 2 раза больше, т.е Петя пробежит $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$)

Это их первая встреча (т. Е)

За то время, пока Петя пробегает полкруга, Вася может дважды преодолеть это расстояние. Поэтому, когда Петя будет в т. В, Вася окажется на старте. И далее они снова бегут навстречу друг другу. Вася пробежит в 2 раза больше => они встретятся на расстоянии $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ круга от старта.

Это их вторая встреча (т. D).

~~Затем~~ Пусть Петя добегает до т. С, пробежав $\frac{3}{4}$ круга. За это время Вася пробежал $\frac{6}{4}$ круга, т.е $\frac{1}{2}$ круга в сторону против часовой стрелки и круг по часовой. Значит он оказался в т. В

Чтобы добежать до финиша, Пете нужно потратить $\frac{\frac{1}{4}}{v_П} = \frac{1}{4v_П}$ времени. Васе – $\frac{\frac{1}{2}}{2v_П} = \frac{1}{4v_П}$. То есть в этой ситуации они встречаются на старте. Но при этом, если Вася развернется в какой-нибудь точке между точками B и D, то он сможет догнать Петю раньше, чем на старте.

Пример: после второй встречи с Петей Вася пробежал еще ~~а~~ половину ~~круга~~ $BO = \frac{1}{12}$ круга. Тогда Петя пробежал $\frac{1}{24}$ круга.

Значит, Васе осталось бежать $1 - \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{12}\right)$ круга $= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{12} =$

$= \frac{12-6-1}{12} = \frac{5}{12}$ круга. Он это сможет сделать за время $t_B =$

$= \dfrac{\frac{5}{12}}{2v_П} = \frac{5}{24v_П}$

Пете осталось бежать $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} - \frac{1}{24} = \frac{24-12-4-1}{24} = \frac{7}{24}$ круга

Он это сделает за время $= \dfrac{\frac{7}{24}}{v_П} = \frac{7}{24v_П}$

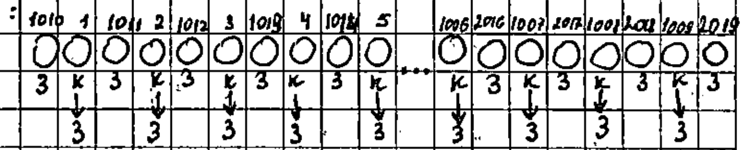
$\frac{7}{24v_П} > \frac{5}{24v_П}$ => Петя потратит больше времени, чтобы добежать до финиша => Вася догонит его раньше. Это его третья встреча.

№7 Расставим всех 2019 хамелеонов в ряд, в том порядке, в котором они давали ответы. Будем называть хамелеона „натуральным", если он был изначально зеленым. Коричневые хамелеоны всегда врут, а значит, после их ответа кол-во зеленых хамелеонов увеличивается. И в конце концов их будет 2019.

Натуральные хамелеоны всегда говорят правду. А это значит, что в ряду между двумя натуральными хамелеонами обязательно будет коричневый хамелеон, т.к. в противном случае натуральные хамелеоны дадут одинаковые ответы, хотя по условию все ответы разные. Значит мы можем сделать вывод, что натуральных хамелеонов не ~~б~~ больше $\frac{1}{2} \cdot (2019+1)$

Так как последовательность, в которой чередуются натураль- ные и коричневые хамелеоны может начинаться с натурального хамелеона. А значит, ~~зел~~ натуральных хамелеонов ≤ 1010

Приведем пример: (ответ / цвет) :



з-зеленый, к-коричневый

Предположим, что было больше натуральных хамелеонов, чем 1010, например, 1011. Тогда коричневых хамелеонов было 1008. В таком случае мы не сможем расставить коричневых хамелеонов во все промежутки между натуральными. Значит, какие-то 2 хамелеона будут стоять рядом. Т.к. между ними нет коричневого хамелеона, кол-во зеленых после ответа первого не изменится. Следовательно второй скажет правду и даст такой же ответ. По условию, ответами были числа: 1, 2, 3, ... 2019. То есть все ответы разные. - противоречие. Значит натуральных ~~хамел~~ хамелеонов не больше, чем 1010.

Аналогично доказывается для чисел (1012 ... 2019).

Ответ: 1010.

№8 Рассмотрим 3 числа, удовлетворяющих условию: A_1, A_2, A_3 $(A_1 > A_2 > A_3)$

$$\begin{cases} A_1 - A_2 = x^2 \\ A_2 - A_3 = y^2 \\ A_1 - A_3 = z^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_2 - A_3 = y^2 \\ A_1 - A_3 = z^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_2 - A_1 = y^2 - z^2 \\ A_1 - A_2 = x^2 \end{cases}$$

$$2A_2 - 2A_1 = y^2 - z^2 - x^2$$

$$2A_2 = y^2 + z^2 - x^2$$

$$\frac{y^2 + z^2 - x^2}{2} - A_3 = x^2 - y^2$$

$y^2+z^2-x^2-2A_3=2x^2-2y^2$

$3x^2-3y^2-z^2=-2A_3$

$z^2-3x^2-3y^2=2A_3$

$A_1-\frac{z^2-3x^2-3y^2}{2}=z^2$

$2A_1-z^2+3x^2+3y=2z^2$

$2A_1=3z^2-3x^2-3y^2$

$A_1=\frac{3z^2-3x^2-3y^2}{2}$

$A_1-A_2=1{,}5z^2-1{,}5x^2-1{,}5y^2-\frac{y^2+z^2-x^2}{2}$

$3z^2-3x^2-3y^2-y^2-z^2-x^2$

$=2z^2-4x^2-3y^2=x^2$

$5x^2=2z^2-3y^2$

$x^2=\frac{2z^2-3y^2}{5}$ $\qquad y^2+z^2-x^2-A_3=\frac{2z^2-3y^2}{5}-y^2$

$\frac{y^2+z^2-x^2}{2}-\frac{2z^2-8y^2}{5}=A_3$

$\frac{5y^2+5z^2-5x^2-4z^2+16y^2}{10}=A_3$

$\frac{21y^2+z^2-5x^2}{10}=\frac{z^2-3x^2-3y^2}{2}$

$21y^2+z^2-5x^2=5z^2-15x^2-15y^2$

$\begin{cases}5x^2-2z^2+3y^2=0\\6z^2-10x^2-36y^2=0\end{cases}$ $\qquad +\begin{cases}10x^2-4z^2+6y^2=0\\6z^2-10x^2-36y^2=0\end{cases}$

$2z^2=30y^2$

$z^2=15y^2$ $\qquad$ 15 – не квадрат нат. числа =>

=> противоречие

Ответ: нельзя.

№9 В конце мы получим 1000 чисел. При этом каждое число из этой строки имеет общие делители с 1000 числами из первой строки (пример: ~~в~~ $Б_1$ имеет общ. делители с A_1 и A_2, а $В_3$ с A_1, A_2 A_3 и т.д.)

1 A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 A_7 ... A_{1999}

2 $Б_1$ $Б_2$ $Б_3$ $Б_4$ $Б_5$ $Б_6$

3 $В_1$ $В_2$ $В_3$ $В_4$ $В_5$

1000 X_1 X_2 X_3 X_4 ... X_{1000}

Предположим, что в 1000 строке есть 1000 последовательных чисел, тогда 500 чисел - четные, 500 - нечетные. Значит, не меньше, чем 1499 чисел из первой строки - четные (т.к каждое число из 1000-ой строки имеет общие делители с 1000 из первой, поэтому если есть 500 четных чисел, идущих подряд (в лучшем случае), то минимум $1999-500=1499$ чисел будут четными в первой строке).

Тогда 333 - 334 числа кратны 3 из 1000-ой строки

Так как каждое число имеет общие делители с 1000 числами из первой строки, а всего чисел 1999, то ~~A_1~~ X_1 имеет общие делители с $A_1, A_2, \ldots, A_{1000}$. А число X_{1000} имеет общие делители с $A_{1000}, A_{1001}, \ldots, A_{1999}$. Значит, X_1 имеет общие делители с ~~A_{1000}~~ X_{1000}. Аналогично X_2 имеет общие делители с X_{1000} и т.д.

~~Таким образом~~ Аналогично каждое из чисел $X_1, X_2, X_3 \ldots X_{1000}$ имеет общие делители друг с другом и с числом A_{1000}.

Но при этом в паре последовательных чисел, числа взаимно просты друг с другом. Значит, $X_1, X_2, X_3 \ldots X_{1000}$ не могут быть последовательными числами.

№8 $A_1 > A_2 > A_3$ (Решение 2)

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = x^2 \\ A_2 - A_3 = y^2 \\ A_1 - A_3 = z^2 \end{cases}$$

$A_1 - A_3 = (A_1 - A_2) + (A_2 - A_3) = A_1 - A_3$

$\Rightarrow z^2 = x^2 + y^2$ ~~$\Rightarrow 2A_1 + A_3$~~

z - гипотенуза, x, y - катеты прямоугольного треугольника

Значит, $A_1 - A_2 = z^2 - y^2$

Пусть $A_1 = z^2$, $A_2 = y^2$

$z = \sqrt{A_1}$ $y = \sqrt{A_2}$

Таким образом, каждое число из полученных (кроме 2-х наименьших) будет ~~как~~ большим, меньшим катетом и гипотенузой.

А значит, каждый квадрат натурального числа состоит из суммы квадратов других натуральных чисел, которые также состоят из суммы квадратов и т.д.

Следовательно $A_1 - A_2$ одновременно и разность квадратов, и сумма квадратов и квадрат нат. числа.