Фамилия	Каринская
Имя	Элина
Отчество	Алексеевна
Область	Вологодская
Город	ВМЛ
Школа	БОУ ВО «ВМЛ»
Класс	8
Регистрационный номер	15525

№1. Нам дано шестизначное число $\overline{abcdef}$. По условию:

$(a\cdot b\cdot c\cdot d\cdot e\cdot f)\cdot(a+b+c+d+e+f)=390$

Разложим 390 на множители, чтобы посмотреть, какими могут быть сумма и произведение цифр.

390	5
78	2
39	3
13	13
1	

$\Rightarrow 390=5\cdot2\cdot3\cdot13$

Т.к. 13 - это двузначное число, оно будет входить в множитель суммы, т.е. $(a+b+c+d+e+f)=13\cdot k$

Пусть сумма ~~чисел~~ цифр $=13$, тогда произведение равно $30=$ $=5\cdot2\cdot3\cdot1\cdot1\cdot1$ (т.к. мы умножаем 6 цифр, а числа 5, 2, 3 - простые $\Rightarrow$ мы не можем их разложить на меньшие множители)

Тогда сложим множители: $5+2+3+1+1+1=13$ $\quad 13=13\Rightarrow$ подходит

И мы можем записать 6-и значное число ~~6! способов~~ различными способами, располагая эти ~~числа~~ цифры в каком-либо порядке.

Пример: 111235, 112135, 513211 и т.д.

$\Sigma=1+1+1+2+3+5=13$ $\quad P=1\cdot2\cdot3\cdot1\cdot1\cdot5=30$ $\quad 30\cdot13=390$.

Предположим, что сумма цифр $\neq13$:

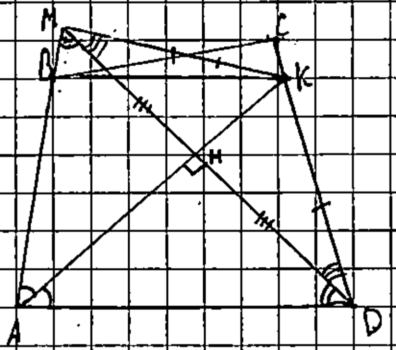
1) $\Sigma=13\cdot2=26\Rightarrow P=5\cdot3\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1$, при сложении множителей получаем: $5+3+1+1+1+1=12$ $\quad 12\neq26\Rightarrow$ не подходит.

2) $\Sigma=13\cdot3=39\Rightarrow P=5\cdot2\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1$, $5+2+1+1+1+1=11$ $\quad 11\neq39\Rightarrow$ не подходит

3) $\Sigma=13\cdot5=65\Rightarrow P=2\cdot3\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1$, $2+3+1+1+1+1=9$ $\quad 9\neq65\Rightarrow$ не подходит.

Значит, нужные нам шестизначные числа получаются ~~сложением~~ из цифр: 5, 2, 3, 1, 1, 1, 6! способами. Пример: 111235

№3



Дано: $ABCD$ – чет-ник.

AK – бис. $DK=BC$

$KC+AB=AD$

Док-ть: $\angle BCD = \angle ADC$.

Док-во:

Достроим сторону AB на отрезок CK (т.е. отложим отрезок CK на прямой AB за т. B, $BM = CK$)

Значит $AM = AB + BM = AB + CK = AD$ => $\triangle AMD$ – р/б (по опр.)

=> $\angle BMD = \angle ADM$, AH – бис, медиана, высота

$MH=HD$, $\angle KHM = \angle KHD = 90°$, KH – общая => $\triangle MKH = \triangle DKH$ (по 2-м ст. и ∠ м.н.) => $MK = KD$, $\triangle MKD$ – р/б, $\angle KMD = \angle KDM$

$\angle BMK = \angle ADM + \angle KDM = \angle ADK = \angle ADC$

Значит, остается доказать, что $\angle BMK = \angle BCD$

Доп. постр: отрезок BK

$MK = KD$ (по доказ выше), $BC = KD$ => $MK = BC$

$MB = CK$ (по постр.) => $\triangle BMK = \triangle KCD$ (по 3-м сторонам)

BK – общая

=> $\angle BMK = \angle BCK$ => $\angle BMK = \angle BCD$ => $\angle ADC = \angle BCD$

ч.т.д.

№2 Написанные на доске числа могут быть, как положительными, так и отрицательными. Рассмотрим, на каком промежутке могут лежать эти числа.

$a_{max} < \sqrt{500}$ $\quad 22^2 = 484 \quad 23^2 = 529$ => $|a| \le 22$

Значит, числа лежат на промежутке $[-22; 22]$

Запишем значения квадратов для модулей чисел данного промежутка:

$|22|^2=484$ $|21|^2=441$ $|20|^2=400$ $|19|^2=361$ $|18|^2=324$ $|17|^2=289$

$|16|^2=256$ $|15|^2=225$ $|14|^2=196$ $|13|^2=169$ $|12|^2=144$ $|11|^2=121$ $|10|^2=100$

$|9|^2=81$ $|8|^2=64$ $|7|^2=49$ $|6|^2=36$ $|5|^2=25$ $|4|^2=16$ $|3|^2=9$

$|2|^2=4$ $|1|^2=1$ $0^2=0$

Возможные суммы 2-х наибольших чисел.

1) $22^2+3^2=493$ ($22^2+4^2=500$ => не подходит) Числа: 22, 3, 0, -3, -22 = 5шт.

Нам нужно найти наибольшее кол-во чисел находящихся на промежутке [0; 22] и удовлетв. условию. Тогда кол-во чисел на промежутке [-22; 0] будет таким же и при этом наибольшим => сумма наибольшего возможного кол-ва чисел на промежутках = n наибольшему. Будем брать числа с разницей в 3 ед, чтобы n было наибольшим.

2) $21^2+7^2=441+49=490$ ($21^2+8^2=441+64=505$ - не подходит).

Числа: 21, 7, 4, 1, -2, $\underbrace{-3, -22}_{n.1}$ = 7шт

3) $20^2+9^2=481$ ($20^2+10^2=500$ - не подходит)

Числа: 20, 9, 6, 3, 0, -3, -6, -9, -20 = 9шт

3) $19^2+11^2=361+121=482$ ($19^2+12^2=361+144=505$ - не подходит)

Числа: 19, 11, 8, 5, 2, -1, -4, -7, -10, -13, -18 = 11 шт

4) $18^2+13^2=324+169=493$ ($18^2+14^2=324+196=520$ - не подходит)

Числа: 18, 13, 10, 7, 4, 1, -2, -5, -8, -11, -14, -17 = 12 шт

5) $17^2+14^2=289+196=485$ ($17^2+15^2=289+225=514$ - не подходит)

Числа: 17, 14, 11, 8, 5, 2, -1, -4, -7, -10, -13, -18 = 12шт.

6) $16^2+15^2=256+225=481<500$ => если $a_{max}=16$,

то промежуток: 16, 13, 10, 7, 4, 1, -2, -5, -8, -11, -14, -17 = 12шт.

7) $15^2+12^2<500$ 15, 12, 9, 6, 3, 0, -3, -6, -9, -12, -15 = 11 шт.

Если $a_{max}<15$, то n - не наибольшее

Таким образом получим, что n наибольшее $=12$

Пример: 17, 14, 11, 8, 5, 2, -1, -4, -7, -10, -13, -16

$17^2+14^2=289+196=485<500$

$(-13)^2+(-16)^2=169+256=425<500$

Пусть $n_{наиб}>12$, ~~тогда~~ Мы рассмотрели, что максимально возможное кол-во чисел удовл. условию на промежутке $[0;22]=6$. => ~~В~~ Нужно включить 0 в этот промежуток.
Для увеличения n, будем брать числа, отличающиеся на 3 единицы. Получим ряд:

-18, -15, -12, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18

Тогда $18^2+15^2=\cancel{289}\,324+225=\cancel{514}\,549$ – не подходит => $n<13$

Ответ: 12.

№4 Точка №1 соединена с 10 точками: №2, №3, №4, №5, №6, №7, №8, №10, №9, №11
=> степень точки №1 $=10$ – четна

Точка №2 соединена с 11 точками: №1, №3, №4, №5, №6 ... №11, №12
=> степень точки №2 $=11$ – нечетна

Точка №3 соединена с 12 точками: №1 №2, №4, №5, №6, №7 ... №12, №13
=> степень точки №3 $=12$ четная.

Аналогично степени точки №4 – нечетна, №5 – четна, №6 – нечетна, №7 – четна, №8 – нечетна, №9 – четна, №10 – нечетна, №11 четна.

Точка №12 соединена с 20 точками: №2, №3, №4, №5, №6, №7, №8, №9, №10, №11, №13, №14, №15, №16, №17, №18, №19, №20, №21, №22 => ее степень четна. Точки от №11 до №40 соединены с 20-ю другими точками, их степени четны $=20$.

Точка №50 соединена с 10 точками: №49, №48, №47, №46, №45, №44, №43, №42, №41, №40 => ее степень четна. Тогда степень точки №49 нечетна

№48 - четна, №47 - нечетна, №46 - четна, №45 - нечетна, №44 - четна, №43 - нечетна, №42 - четна, №41 - нечетна.

Таким образом, на начало игры на полуокружности было 10 точек с нечетной степенью и 40 точек с четной степенью

Панда стирает отрезок, соединяющий точки, сумма степеней которых четна. => он может стереть либо 2 точки с нечетными степенями (увеличив число точек с чет. степенями), либо 2 точки с четными (уменьшая число точек с четными степенями)

1) ~~Панда стирает 2 точки, обе с неч. степенью, делая их четными.~~

Тогда после его хода останется 42 чет. степени и 8 нечетных

Вомбат стирает 2 точки с разными степенями, при этом кол-во точек с чет/нечет степенями не меняется.

Предположим, что выиграет Вомбат, значит на полуокружности не найдется отрезков, соединяющих 2 чет. или 2 нечетные точки

Если же выиграет Панда, то на полуокружности не останется отрезков, соединяющих чет. и нечет. точки

Если Панда стирает (отр., соед) 2 четные точки, то он увеличивает число отрезков „подходящих“ для Вомбата. Если стирает 2 неч., то уменьшает. Вомбат после каждого хода не ~~у~~ изменяет или увеличивает кол-во „подходящих“ для себя отрезков.

Стратегия:

Панда стирает (отр. соед) 2 точки с неч. степенями, затем Вомбат стирает отр., соед неч. и чет. точку. Это повторяется 4-5 раз.

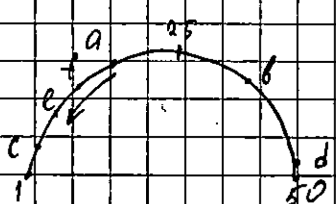
После этого ~~в худшем случае~~ останется 2 точки с неч. степенями и 48 с чет.

В худшем случае эти 2 точки находятся на расстоянии ≤9 точек. В худшем - ~~...~~ >9 точек

В первом случае Панда делает ход и побеждает.

Во втором случае Панда стирает отрезок, ~~что~~ делает точки 20 и 29 нечетными (если 2 неч точки после первых пяти ходов в разных четвертях c, d). После этого расстояние между этими точками (a, b) = 9 точек, а между ними и концами = 18.

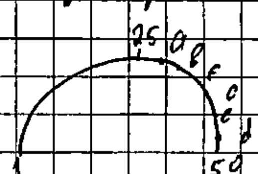
Значит, если Вомбат будет „перемещать" нечетную точку c, то она и окажется на расстоянии ≤ 17 точек. Затем Панда (~~ставит~~ добавляет неч. точки) „двигает" свою точку (~~...~~ в) и сокращает расстояние до до 9 точек: После чего делает 2 точки четными



Аналогично с точкой d

Таким образом, Панда победит.

Если же 2 точки c, d находятся в 1 четверти и расстояние между ними ≥ 9 точек, то Панда делает неч. какие-либо 2 точки a, b этой четверти, при этом расстояние между a и b ≤ 3 и „двигает" ~~точку~~ точки b к точкам c, d, сокращая расстояние



Побеждает Панда

№5 Верно.