МЭ–2020–І–22

Фамилия	**Максимова**
Имя	**Ксения**
Отчество	**Сергеевна**
Область	**Вологодская**
Город	**Вологда**
Школа	**МОУ «Лицей №32»**
Класс	8
Регистрационный номер	**13090**

№ 1

Ответ: 5 3 2 1 1 1

Пояснение: $(5+3+2+1+1+1)\cdot 5\cdot 3\cdot 2\cdot 1^3 =$

$= 13\cdot 5\cdot 3\cdot 2 = 390.$

№ 2

Ответ: 12.

Пример: написаны числа

$-17; -14; -11; -8; -5; -2; 1; 4; 7; 10; 13; 16.$

1) $(-17)^2 + (-14)^2 = 289 + 196 < 300 + 200 = 500$

2) $13^2 + 16^2 < 14^2 + 17^2 < 500$. Пример подходит под условие.

Оценка: Предположим противное. Пусть на доске написано х.б. 13 чисел.

Назовём все числа, не меньшие 0 – положительной стороной. То есть сторона содержит числа.

Отрицательной стороной назовём все числа не большие 0 (то есть стороны могут иметь общее число – 0).

Тогда на какой-то стороне должно быть не меньше 7 чисел, иначе всего чисел не больше $6 \cdot 2 = 12$.

1. Если их хотя бы 7 на положительной стороне.

Отсортируем числа в порядке возрастания. Тогда первое число ~~не меньше~~ хотя бы $0 \Rightarrow$ $\Rightarrow$ второе не меньше 3, третье не меньше 6, ..., шестое не меньше 15, седьмое не меньше 18.

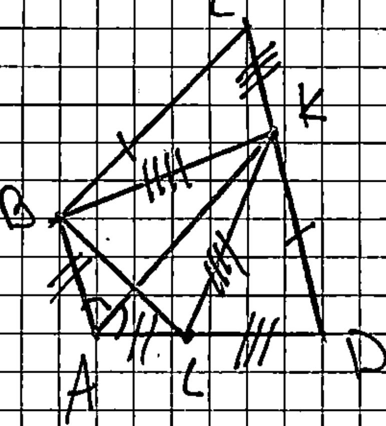
Тогда сумма квадратов двух наибольших чисел не меньше $15^2+18^2=$ $=225+324>200+300=500$ Противоречие. Не может быть такого случая $\Rightarrow$

2. На отрицательной стороне тоже ~~бо~~ 7 чисел.

Отсортируем их в порядке убывания. Тогда первое число не больше 0, второе число не больше 3, ..., шестое не больше 15, седьмое не больше 18 $\Rightarrow$ модули двух наименьших чисел не меньше 15 и 18, а их квадраты $(-15)^2+(-18)^2=15^2+18^2>500$.

То есть аналогично пришли к противоречию. Следовательно невозможно, чтобы на стороне было больше 6 чисел $\Rightarrow$ их всего не больше 12. Оценка доказана.

№3.



$DK = BC$, $KC + AB = AD$.

(!) $\angle BCD = \angle ADC$.

Доказательство:

1) Обозначим точку L на стороне AD такую, что $AB = AL$. Тогда, т.к. $AD = AB + CK = AL + CK$, то $LD = CK$.

2) Заметим, что $\triangle ABL$ равнобедренный и AK – бис-са $\angle A \Rightarrow AK$ – серединный перпендикуляр к $BL \Rightarrow BK = KL$, т.к. т. K лежит на серединном перпенд. к BL.

3) Тогда заметим, что $\triangle BCK = \triangle KDL$ по III признаку, т.к. $BC = KD$, $CK = LD$ и $BK = KL \Rightarrow \angle C = \angle D$ как соответственные в равных треугольниках.

Что и треб. доказать.

№5.

Докажем по индукции, что для любой замкнутой ломаной с $2n+1$ звеном, что если каждое её звено, кроме двух пересекает $(2n+1)-3=2n-2$ звеньев, не имеющих с ним общих концов, то и оставшиеся 2 звена пересекает $2n-2$ звенья.

~~База~~

База $n=1$

$2n+1=3$.

Заметим, что замкнутая ломаная на 3 звеньях – это треугольник, т.к. по условию никакие 3 вершины ломаной не лежат на одной прямой.

Но для треугольника действительно верно, что каждую его сторону пересекает $3-3=0$ других сторон. База доказана.

Переход Пусть утверждение верно для $n=k$, то есть для ломаной с $2k+1$ звеном $(k \geq 1)$. Докажем, что верно и для $n=k+1$ $(k+1 \geq 2)$.

Так как $2(k+1)+1 \geq 2\cdot 2+1=5$, то найдется х.б. 2 звена, которые пересекают

$2(k+1)+1-3 = 2k$ других звена. ~~Рассмотрим~~ ~~их [звено] соседние звенья и продлим~~ ~~их до точки пересечения~~

~~Возьмем~~ Рассмотрим 1 из этих 2-х звеньев. Продлим его соседние до точки пересечения. „Забудем" это звено и будем считать, что эта точка пересечения — вершина ломаной.

Так же поступим со вторым звеном. Получим $2(k+1)+1-2 = 2k+1$ - звеньевую ломаную, для которой по предположению индукции верно. Но тогда и для $2k+3$ звеньевой ломаной верно, т.к. верно для „забытых" звеньев

Переход доказан. => Утверждение доказано

Значит, $1001 = 500 \cdot 2 + 1$ => если каждое звено пересекает $1001-3 = 998$, то и ост. 2 так же пересекает.

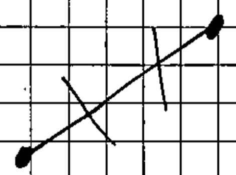
Примечание: так как в $2k+3$ ~~[illegible]~~ звенье-вой ломаной хотя бы ~~[illegible]~~ 3 ~~вершины~~ звена которые пересекают все, кроме 2-х (т.к. в этой ломаной хотя бы 5 звеньев), то если для какого-то звена ~~[illegible]~~ его соседние параллельны, то, очевидно, это те, которые оставшиеся 2 не будут иметь соседних параллельных.

Но если окажется, что мы выбрали подходящие соседние, то предположим, что

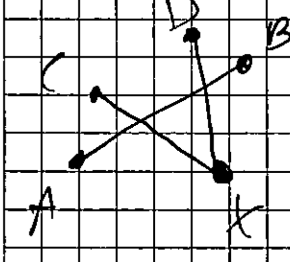
В нашей ломаной хотя бы 7 звеньев, тогда мы можем найти 2 пары подходящих.

База для $k=2$. Пятизвенная ломаная

Рассмотрим звено, кот. пересекают 2 др. звена

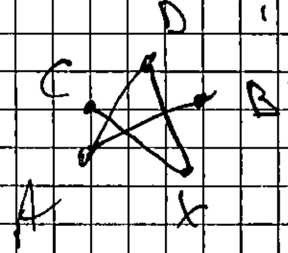


Так как 5 вершин, то эти 2 звена имеют общую вершину.

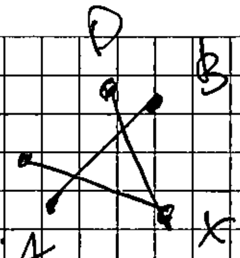


Обозначим рассматриваемое звено как AB, общую вершину двух звеньев за X, а сами звенья за CX и DX.

1. Если звено CX пересекают дважды (случай, когда дважды пересекают звено DX аналогичен), то его пересекают звенья AB и AD, другие не могут.



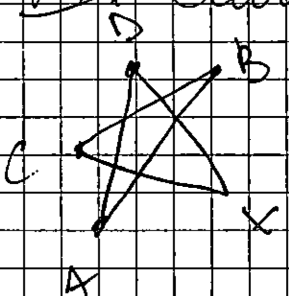
Осталось заметить, что CB пересекает AD и DX, иначе условие не выполнено, т.к. AD и DX пересекают по 1 разу, а CB ноль раз.



~~Если контрпример~~: A

II. случай. Если звено AC пересекают двоих (случай с BD аналогичен) невозможен, т.к. DB его не может пересекать.

III. Если CB пересекают двоих,

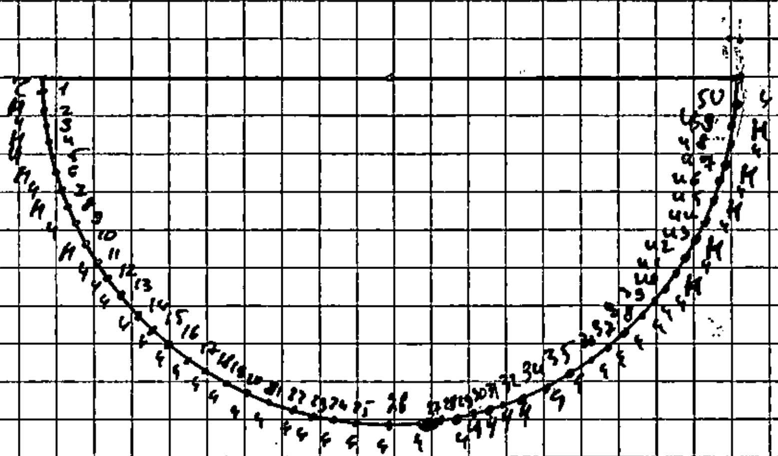


то второй раз его пересекает AD. Но тогда снова все требуемые условия выполнены.

База для $k=2$ доказана $\Rightarrow$ найдутся такие 2 звена, которые пересекают $2k$ др. звеньев, соседи которых не пересекаются и которые сами не соседи (т.к. $k \geq 3$ и в ломаной хотя бы 7 звеньев.)

№4.

Нарисуем полуокружность и отметим на ней точки, подписав какой чётности их степени (н - нечётная, ч - чётная)



· Заметим, что всех нечётных и чётных степеней чётное кол-во

· Заметим, что после хода Вомбата кол-во чётных и нечётных не меняется

· Заметим, что после хода Панды кол-во чётных и нечётных уменьшается на 2

· Заметим, что Панда победит, если все отрезки будут с вершинами одинаковой чётности (может нулевые)

· Заметим, что победит Вомбат, если у любого отрезка вершины будут разной чётности ненулевые (т.к. всего отрезков $\frac{50 \cdot 9}{2} = 25 \cdot 9$ - нечётное $\Rightarrow$ нулевыми они могут стать только после хода первого - т.е. Панды)